

### ОТЗЫВ В ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

кафедры дифференциальных уравнений МГУ на диссертацию  
Кулешова Павла Александровича "ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ",  
представленной к защите на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное  
управление.

Стратифицированное множество отличается от обычной области или многообразия тем, что на нем свойство эллиптичности не может быть описано в терминах символа или квадратичной формы. Стратифицированное множество не допускает даже локальной координатизации, а потому здесь приходится руководствоваться иными соображениями. Оказывается, на нем можно определить дивергенцию касательных векторных полей (понимаемых специальным образом) в терминах специальной «стратифицированной» меры, а затем определить лапласиан по аналогии с классическим случаем – как дивергенцию градиента. Соответствующие этому подходу элементы математического анализа начали закладываться в середине 90-х годов. Впрочем, по другим поводам элементы такого анализа можно найти у Х. Уитни. Хотя до построения развитой теории эллиптических операторов на стратифицированном множестве еще далеко, но уже сейчас можно констатировать, что исследования в данной области начинают отходить от общих вопросов к специальным. Рассматриваемая диссертация подтверждает эту тенденцию. Она почти целиком посвящена вопросу об оценке первого собственного значения лапласиана на стратифицированном множестве с условиями Дирихле на его границе. Остановимся на кратком описании результатов по главам диссертации. Первая глава посвящена оценке первого собственного значения в задаче Штурма – Лиувилля для лапласиана на так называемом геометрическом графе. Доказано, что первое собственное значение может быть оценено снизу первым собственным значением оператора с нулевыми условиями Дирихле на концах отрезка, длина которого в точности равна сумме длин, составляющих граф ребер. Полученная оценка является точно в рамках используемых диссертантом понятий, и является точным аналогом известной теоремы Фабера – Крана о минимальном свойстве лапласиана на шаре (первое собственное значение лапласиана минимально на шаре, если сравнивать его с другими областями того же объема). Техника доказательства является комбинацией принципа Рэлея и принципа Пойа – Сего, доказываемого на основе перестановочной техники. Полученная оценка является точной и доказана в максимальной общности (имеются ввиду геометрические ограничения, предъявляемые к графу). Так что формально результат является окончательным. Следует заметить, однако, что техника симметричных перестановок игнорирует геометрию, учитывая лишь меру. Учет геометрии представляется естественным. Например, хорошо известно из теории усреднения, что спектр частот собственных колебаний равномерных сеток из струн близок к аналогичному спектру мембран, получаемых усреднением сеток. Желательно получение оценок, учитывающих в какой-то степени геометрию сетки. Правда, подходящей техники для решения

этого вопроса пока, по всей видимости, нет. Вторая глава посвящена тому же вопросу, что и первая, но теперь уже рассматривается лапласиан на двумерном стратифицированном множестве. Здесь результат совсем уже напоминает классический. Первое собственное значение оценивается снизу первым собственным значением лапласиана в двумерном шаре. Техника аналогична той, что применяется в первой главе, но активно эксплуатируется «изопериметрическая» идеология. Результат доказывается при специальных предположениях геометрического устройства множества, выполняющихся лишь для специального класса стратифицированных множеств. Насколько сформулированные условия необходимы не обсуждается. Данная глава может скорее рассматриваться более как стимулирующая дальнейшие исследования, чем дающая окончательные ответы на поставленные вопросы. Тем не менее содержание главы заслуживает положительной оценки и представляет определенный научный интерес. Третья глава несколько выбивается из общей колеи. В ней автор отходит от лапласиана, переходя к так называемому  $p$ -лапласиану. Здесь речь идет о некотором аналоге неравенства Соболева, однако вместо двух показателей степени мы видим один. Автор формулирует геометрические условия, связанные со скачками размерностей соседних страт, обеспечивающие справедливость неравенства. Далее дается приложение полученного неравенства к доказательству разрешимости задачи Дирихле для  $p$ -лапласиана, что еще далее уводит автора от основной темы – оценки первого собственного значения лапласиана. Результат этой последней главы доказан без ограничения на размерность стратифицированного множества. В качестве пожелания автору нам хотелось бы предложить исследовать случай неравенства Соболева с двумя показателями и выяснить связь между показателями и геометрией стратифицированного множества. Несмотря на имеющиеся недочеты диссертация заслуживает высокой оценки. Результаты носят, главным образом, теоретический характер и могут быть использованы в ведущих научных центрах при исследованиях эллиптических дифференциальных уравнений в Московском, Новосибирском, Санкт-Петербургском, Воронежском университетах. Все результаты прошли достаточную апробацию. Все они тщательно обоснованы с привлечением большого иллюстративного материала. Опечаток, достойных быть отмеченными особо мы не обнаружили. В списке публикаций три работы относятся к перечню, предъявляемому ВАК к защита диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Содержание диссертации, публикации по теме, использованные методы исследования полностью соответствуют паспорту специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Основными методами исследования являются классические методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, динамические системы и оптимальное управление. Диссертант проявил высокую культуру и виртуозное владение перечисленными выше методами. Еще бы хотелось отметить техничность работы, что потребовало от диссертанта приложения немалых усилий.

В диссертации достаточно описок, к счастью не препятствующих как пониманию результатов так и их точности. Единственно, что хотелось бы отметить, что желательны комментарии, поясняющие этапы формулировки проблем и пошаговой их реализации. Иначе обилие формул и техники чрезвычайно усложняет чтение диссертации.

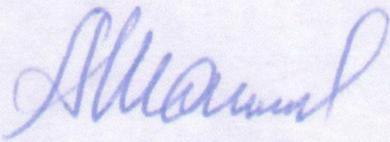
Основное содержание диссертации опубликовано в открытой печати. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Несомненно, диссертация удовлетворяет всем требованиям Высшей аттестационной комиссии, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук. Уровень квалификации диссертанта по данной тематике и содержание диссертации позволяют заключить, что ее автор Кулешов Павел Александрович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 —

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

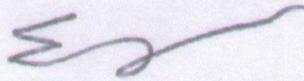
Отзыв утвержден на заседании кафедры дифференциальных уравнений МГУ, протокол заседания No 231, от "06" ноября 2015 г.

Заведующий кафедрой, академик РАН



В.В. Козлов

д.ф.-м.н., профессор



Е.В. Радкевич

Адрес: Москва, Ленинские горы, 8-1., 119991, МГУ  
Тел. +74959391000, e-mail: www.msu.ru